

REPONSE DES CIRCUITS A UN ECHELON DE TENSION REGIME TRANSITOIRE D'ORDRE 1

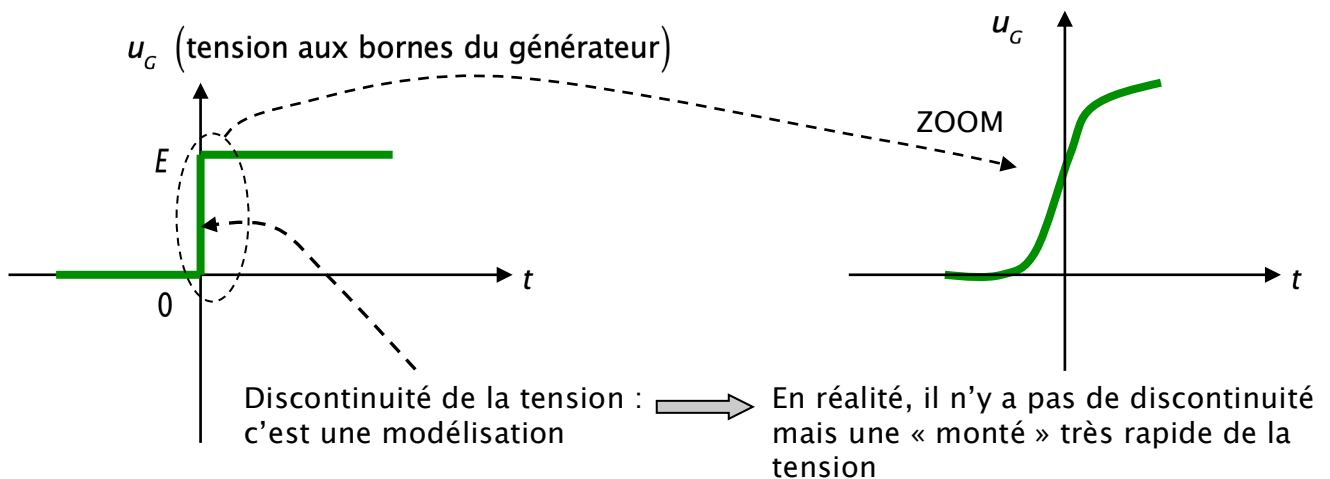
«Une panne d'électricité laisse l'aveugle indifférent»

Grégoire Lacroix

Dans les circuits électriques, les régimes ont toujours un début. Nous allons étudier comment à partir des conditions initiales, les courants et les tensions s'établissent dans les circuits.

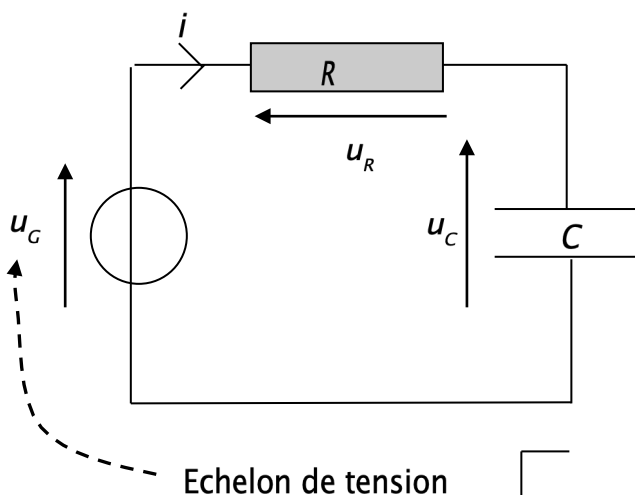
I – Echelon de tension

Nous allons appliquer à des circuits (RC série, RL série et RLC série) de façon soudaine, une tension continue E (on allume le générateur à $t = 0$). Cet effet est modélisé par un **échelon de tension** représenté sur la figure suivante :



II – Réponse à un échelon de tension : circuit d'ordre 1 RC série

2.1 Equation différentielle qui gouverne la tension aux bornes du condensateur



Loi des mailles : $E = u_C + u_R = u_C + Ri$.

Caractéristique condensateur : $i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_C}{dt}$.

Ainsi : $E = u_C + RC \frac{du_C}{dt}$.

On constate que RC est homogène à un temps, on pose par définition :

$\tau \equiv RC = \text{constante de temps du circuit}$

On réécrit ***l'équation différentielle du premier ordre*** sous une forme canonique (standard) :

$$\frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{\tau} = \frac{E}{\tau}$$

Exercice d'application 1: Circuit équivalent en régime permanent et grandeurs électriques.

A partir de la connaissance du comportement du condensateur en DC, représenter le circuit équivalent au circuit précédent en régime permanent (c'est-à-dire quand $t \rightarrow +\infty$, les tensions et courants ne varient plus dans le temps). En déduire $i(t \rightarrow +\infty)$ et $u_c(t \rightarrow +\infty)$.

2.2 Résolution de l'équation différentielle

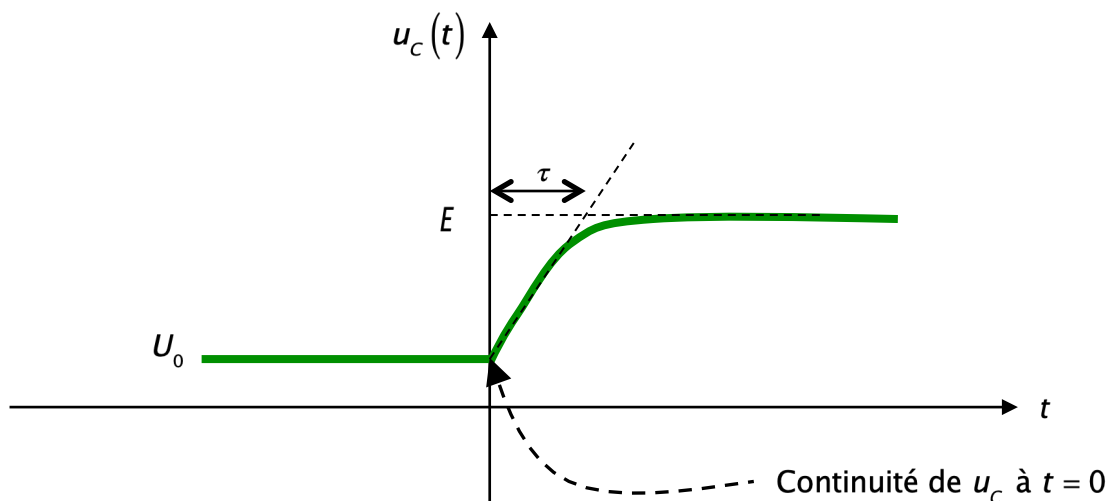
a) condition initiale 1 : $t < 0 \quad u_c = U_0$: le condensateur est chargé

La solution est de la forme (cf. cours de mathématiques):

$$u_c(t) = \underbrace{Ae^{-\frac{t}{\tau}}}_{\substack{\text{Maths: solution homogène} \\ \text{Physique: réponse naturelle}}} + \underbrace{E}_{\substack{\text{Maths: solution particulière} \\ \text{Physique: réponse forcée}}}$$

$u_c(0^-) = u_c(0^+) = U_0$ par continuité de la tension aux bornes du condensateur donc $A = U_0 - E$. Au final :

$$u_c(t) = \begin{cases} U_0 & \text{pour } t < 0 \\ E + (U_0 - E)e^{-\frac{t}{\tau}} & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$$



b) condition initiale 2 : $t < 0 \quad u_c = 0$: le condensateur est déchargé

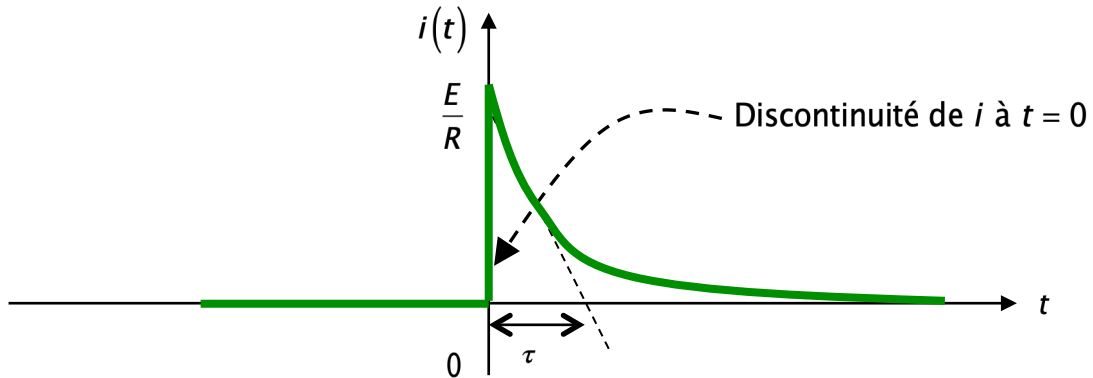
On procède comme en a) ce qui donne immédiatement :

$$u_c(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$$

Nous allons déterminer $i(t)$. $i(t) = C \frac{du_c}{dt} = \frac{C}{\tau} E e^{-\frac{t}{\tau}}$ pour $t \geq 0$ et $i(t) = 0$ pour $t < 0$.

$$i(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ \frac{C}{\tau} E e^{-\frac{t}{\tau}} & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$$

Nous constatons que $i(t)$ est **discontinue** à $t = 0$.



Remarque : équation de la tangente

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = -\frac{1}{\tau} \frac{C}{\tau} E = -\frac{E}{R^2 C}. \text{ L'équation de la tangente s'écrit : } y = -\frac{E}{R^2 C} t + cste.$$

A $t = 0$, $y = \frac{E}{R} = cste \Rightarrow y = \frac{E}{R} \left(1 - \frac{1}{RC} t \right)$ et à $y = 0$ $t = \tau = RC$. On retrouve l'interprétation graphique de la constante de temps.

2.3 Régime transitoire et régime permanent

$$\text{Réponse complète du condensateur} = \begin{cases} \text{réponse purement} \\ \text{TRANSITOIRE} \\ \text{(partie temporaire)} \end{cases} + \begin{cases} \text{réponse du régime} \\ \text{PERMANENT} \\ \text{(partie permanente)} \end{cases}$$



$$u_c(t)$$



$$= \underbrace{(U_0 - E) e^{-\frac{t}{\tau}}}_{\rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow +\infty}$$

$$+$$


$$\underline{E} \\ = u_c(+\infty)$$

Quand $t \rightarrow +\infty$, $u_c = E$, C se comporte donc comme un **interrupteur ouvert**. La réponse du régime transitoire disparaît (meurt) rapidement, seule à long terme la réponse du régime permanent demeure.

2.4 Aspects énergétiques

✓ Energie stockée par le condensateur : $\varepsilon_C = \int_0^\infty P_C(t) dt = \int_0^\infty u_C(t) i(t) dt$

On part de la condition initiale 2 : $t < 0 \quad u_C = 0$.

$$\varepsilon_C = \int_0^\infty E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \frac{C}{\tau} E e^{-\frac{t}{\tau}} dt = \left[-CE^2 e^{-\frac{t}{\tau}} \right]_0^\infty + \left[\frac{CE^2}{2} e^{-\frac{2t}{\tau}} \right]_0^\infty = CE^2 + \left(-\frac{CE^2}{2} \right) = \frac{CE^2}{2} > 0.$$

On peut retrouver directement ce résultat avec $\varepsilon_C = \frac{1}{2} C u_C^2$ avec $u_C = E$ quand $t \rightarrow +\infty$.

✓ Energie dissipée par la résistance : $\varepsilon_R = \int_0^\infty P_R(t) dt = \int_0^\infty u_R(t) i(t) dt$

$$\varepsilon_R = \int_0^\infty \frac{E^2}{R} e^{-\frac{2t}{\tau}} dt = \left[-\frac{\tau}{2} \frac{E^2}{R} e^{-\frac{2t}{\tau}} \right]_0^\infty = \frac{RC E^2}{2} = \frac{CE^2}{2} > 0.$$

✓ Energie fournie par le générateur : $\varepsilon_G = \int_0^\infty P_G(t) dt = \int_0^\infty -u_G(t) i(t) dt$

$$\varepsilon_G = -\int_0^\infty \frac{E^2}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} dt = \left[CE^2 e^{-\frac{t}{\tau}} \right]_0^\infty = -CE^2 < 0.$$

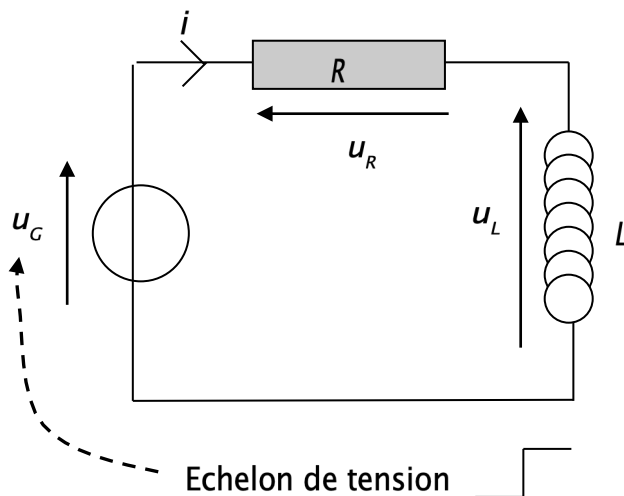
Le signe moins devant l'intégrale provient du fait que nous sommes en convention générateur. Par contre, le résultat final est physique, $\varepsilon_G < 0$ car on a un générateur physique, il fournit de l'énergie au circuit. Pour conclure :

$$\text{Energie cédée par le générateur } (-CE^2 < 0) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Energie stockée par le condensateur} \\ \left(\frac{1}{2} CE^2 > 0 \right) \\ + \\ \text{Energie reçue puis dissipée par la résistance} \\ \left(\frac{1}{2} CE^2 > 0 \right) \end{array} \right.$$

Quelque soit la valeur de R , $\varepsilon_R = \varepsilon_C$. Si R est petit, i est important pendant un temps t court. Si R est grand, i est faible pendant un temps t long.

III – Réponse à un échelon de tension : circuit d'ordre 1 *RL* Série

3.1 Equation différentielle qui gouverne l'intensité



Loi des mailles : $E = u_L + u_R = u_L + R i$.

Caractéristique de la bobine : $u_L = L \frac{di}{dt}$.

Ainsi : $\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \frac{E}{L}$.

On constate que $\frac{L}{R}$ est homogène à un temps, on pose par définition :

$$\tau \equiv \frac{L}{R} = \text{constante de temps du circuit}$$

On réécrit l'équation différentielle du premier ordre sous une forme canonique :

$$\frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = \frac{E}{L}$$

Exercice d'application 2: Circuit équivalent en régime permanent et grandeurs électriques.

A partir de la connaissance du comportement de la bobine en DC, représenter le circuit équivalent au circuit précédent en régime permanent (c'est-à-dire quand $t \rightarrow +\infty$, les tensions et courants ne varient plus dans le temps). En déduire $i(t \rightarrow +\infty)$ et $u_L(t \rightarrow +\infty)$.

3.2 Résolution de l'équation différentielle

On peut procéder comme dans le paragraphe 2.2. Mais ici, nous allons utiliser une autre méthode (équivalente mathématiquement), celle de la « **séparation des variables** » t et i . Nous avons les conditions initiales suivantes : $t \leq 0 \quad i = 0$.

$$\frac{di}{dt} = -\frac{i - E/R}{\tau} \Leftrightarrow \frac{di}{i - E/R} = -\frac{dt}{\tau}, \text{ on intègre:}$$

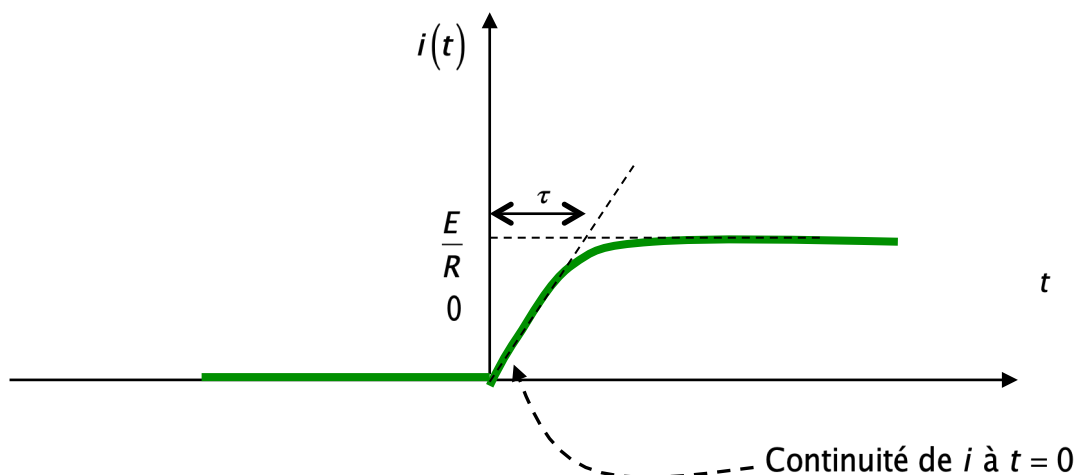
$$\int_0^i \frac{di}{i - E/R} = -\frac{1}{\tau} \int_0^t dt$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{i - E/R}{0 - E/R}\right) = -\frac{t}{\tau} \text{ soit } i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right).$$

Au final :

$$i(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$$

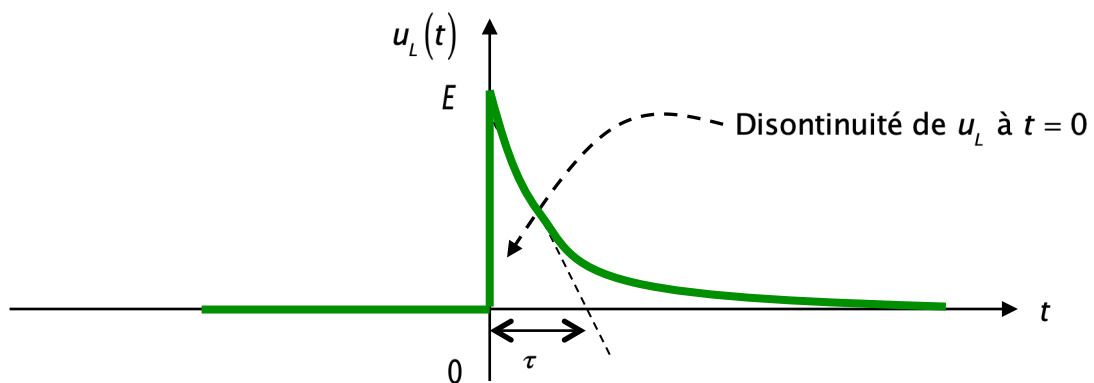
Nous constatons que $i(t)$ est **continue** à $t = 0$.



Nous allons déterminer $u_L(t)$. $u_L(t) = L \frac{di}{dt} = \frac{L E}{\tau R} e^{-\frac{t}{\tau}} = E e^{-\frac{t}{\tau}}$.

$$u_L(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ E e^{-\frac{t}{\tau}} & \text{pour } t > 0 \end{cases}$$

Nous constatons que $u_L(t)$ est **discontinue** à $t = 0$.



3.3 Régime transitoire et régime permanent

$$\text{Réponse complète du circuit en } i(t) = \left\{ \begin{array}{c} \text{réponse purement} \\ \text{TRANSITOIRE} \\ \text{(partie temporaire)} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \text{réponse du régime} \\ \text{PERMANENT} \\ \text{(partie permanente)} \end{array} \right\}$$



$$i(t)$$



$$= \underbrace{-\frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}}_{\rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow +\infty}$$



$$+ \underbrace{\frac{E}{R}}_{=i(+\infty)}$$

Quand $t \rightarrow +\infty$, $i = \frac{E}{R}$, L se comporte donc comme un **fil sans résistance**. La réponse du régime transitoire disparaît (meurt) rapidement, seule à long terme la réponse du régime permanent demeure.

3.4 Aspects énergétiques

✓ Energie stockée par la bobine: $\varepsilon_L = \int_0^\infty P_L(t) dt = \int_0^\infty u_L(t) i(t) dt$

$$\varepsilon_L = \int_0^\infty \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) E e^{-\frac{t}{\tau}} dt = \frac{E^2}{R} \int_0^\infty \left(e^{-\frac{t}{\tau}} - e^{-\frac{2t}{\tau}}\right) dt = \frac{E^2}{R} \left[-\tau e^{-\frac{t}{\tau}} \right]_0^\infty + \frac{E^2}{R} \left[\frac{\tau}{2} e^{-\frac{2t}{\tau}} \right]_0^\infty = \frac{LE^2}{R^2} - \frac{1}{2} \frac{LE^2}{R^2} = \frac{1}{2} \frac{LE^2}{R^2} > 0$$

On peut retrouver directement ce résultat avec $\varepsilon_L = \frac{1}{2} L i^2$ avec $i = \frac{E}{R}$ quand $t \rightarrow +\infty$.

✓ Energie dissipée par la résistance: $\varepsilon_R = \int_0^\infty P_R(t) dt = \int_0^\infty u_R(t) i(t) dt$

$$\varepsilon_R = \frac{E^2}{R} \int_0^\infty \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)^2 dt = \frac{E^2}{R} \left[2\tau e^{-\frac{t}{\tau}} \right]_0^\infty + \frac{E^2}{R} \left[-\frac{\tau}{2} e^{-\frac{2t}{\tau}} \right]_0^\infty + \frac{E^2}{R} [t]_0^\infty = -\frac{2LE^2}{R^2} + \frac{LE^2}{2R^2} + \infty = -\frac{3}{2} \frac{LE^2}{R^2} + \boxed{\infty} > 0.$$

✓ Energie fournie par le générateur: $\varepsilon_G = \int_0^\infty P_G(t) dt = \int_0^\infty -u_G(t) i(t) dt$

$$\varepsilon_G = -\frac{E^2}{R} \int_0^\infty \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) dt = -\frac{E^2}{R} \left[\tau e^{-\frac{t}{\tau}} \right]_0^\infty - \frac{E^2}{R} [t]_0^\infty = -\frac{LE^2}{R^2} - \boxed{\infty} < 0.$$

Quand $t \rightarrow +\infty$, la bobine devient un fil et le générateur doit en permanence compenser les pertes d'énergie dues à la résistance. Dans la réalité, le générateur ne fonctionne pas indéfiniment. Cela se traduit mathématiquement par le fait que l'on n'intègre pas jusqu'à l'infini mais jusqu'à un temps fini.

Pour conclure :

$$\text{Energie cédée par le générateur } (-\infty < 0) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Energie stockée par la bobine} \\ \left(\frac{1}{2} \frac{LE^2}{R^2} > 0 \right) \\ + \\ \text{Energie reçue puis dissipée par la résistance} \\ (+\infty > 0) \end{array} \right.$$